

JY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
MATA2500 Informaatioteoria, Syksy 2019
Harjoitus 2

Tämän viikon demoissa tutkitaan entropian joitakin perusominaisuuksia sekä yhteisinformaatiota.

1. Tiistain luennolla luennoitsija suoritti avustajansa Eskon kanssa taikatempun jonka kulku oli seuraava:
 - (a) Opiskelija sekoittaa tavallisen korttipakan (52 korttia), valitsee viisi korttia satunnaisesti ja salassa, ojentaen ne Eskolle.
 - (b) Esko tuijottaa hetken viittä korttia, ja ojentaa niistä sitten neljä luennoitsijalle, pitäen yhden piilossa itsellään.
 - (c) Luennoitsija katselee hetken saamaansa neljää korttia, jonka jälkeen hän osaa kertoa mikä kortti Eskolla on jäljellä.

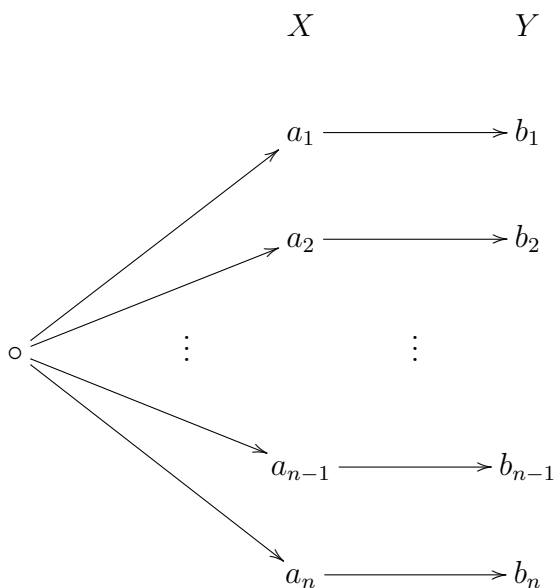
(Tempussa ei ole mitään huijausta eikä tuuria, vaan deterministinen algoritmi. Luennoitsijalla ja Eskolla oli käsissään identtiset ohjelaput koska eivät jaksaneet opetella tiettyjä juttuja ulkoa. Pienellä harjoittelulla lappuja ei tarvitsisi.)

Huomaa, että neljä korttia voi laittaa järjestykseen $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ eri tavalla. Luennoitsijan täytyy selvittää yksi kortti 48:sta. ($52 - 4 = 48$).

Miten paljon informaatiota luennoitsija tarvitsee ja kuinka paljon informaatiota korttien eri järjestyksellä saa? Mistä luennoitsija repi ylimääräisen datan?

(Sinun ei tarvitse pystyä toistamaan temppua ruksiaksesi tehtävän, kunhan sinulla on jokin idea missä data on piilossa. Ihan tarkkoja informaatiomääriä ei tarvitse myöskään laskea. Moraalinen pluspiste jos luot algoritmin jolla tempun voi suorittaa.)

2. Tutkitaan yhteisjakaumaa (X, Y) missä $Y = f(X)$; toisin sanoen meillä on yhteisjakauma jonka todennäköisyysjakauma näyttää seuraavalta.



Laske yhteisinformaatio $I(X; Y)$.

3. Otetaan seuraava yhteisjakauma, missä $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ ja $y \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$P(x, y)$	x			
	1	2	3	4
1	1/8	1/16	1/32	1/32
2	1/16	1/8	1/32	1/32
3	1/16	1/16	1/16	1/16
4	1/4	0	0	0

- Määritä yhteisjakauman ja marginaalijakaumien entropiat $H(x, y)$, $H(x)$ ja $H(y)$.
- Määritä ehdollinen entropia $H(X|y = j)$ kullakin $j = 1, 2, 3, 4$.
- Määritä $H(X|Y)$.
- Määritä $I(X; Y)$.

Syventävät tehtävät

Seuraavat tehtävät palautetaan kirjallisina harjoitusten pitäjälle, kurssin palautuslokeroon tai sähköpostitse. Deadline 12.11.2019 klo 08.30.

- Olkoon $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja vähenevä funktio, jolle pätee

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y \in (0, \infty)$.

- Osoita, että $f(1) = 0$.
 - Oletetaan, että $f(4) = A$. Määritä $f(2)$ sekä $f(8)$.
 - Osoita, että f on välttämättä muotoa $f(x) = -\log_r(x)$ jollakin $r > 0$.
- Määritellään kahden samassa perusjoukossa Ω määritellyn todennäköisyysfunktion P ja Q *Kullback-Leibler divergenssi* seuraavasti:

$$D_{KL}(P||Q) := \sum_{x \in \Omega} P(x) \log_2 \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right).$$

(Edellisissä demoissa näytit että $D_{KL}(P||Q) \geq 0$.)

Osoita, että todennäköisyysjakauman $(\{a_1, \dots, a_k\}, F, P)$ entropia voidaan laskea kaavalla

$$H(P) = H(P_U) - D_{KL}(P||P_U) = \log_2(k) - D_{KL}(P||P_U),$$

missä P_U on tasainen todennäköisyysjakauma $P_U(a_j) = \frac{1}{k}$ joukossa Ω .

- Anna esimerkki yhteisjakaumasta (X, Y) jossa

$$H(X|Y = b_k) > H(X)$$

jollakin b_k . (Tässä siis satunnaismuuttujiin X ja Y liittyvät alkeistapauksien joukot ovat $\{a_1, \dots, a_j\}$ sekä $\{b_1, \dots, b_i\}$.)

Osoita, että aina kuitenkin pätee

$$H(X|Y) \leq H(X).$$